بجعل Δz تسعى نحو الصفر على المحور التخيلي $\Delta z = i\Delta y$ ⇐

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = -z + \bar{z} \quad . \quad \Delta z = i\Delta y$$

ونلاحظ بأن قيمة النهاية اختلفت باختلاف الطريق لذلك فإن الدالة المعطاة غير قابلة للاشتقاق عند $z \neq 0$

ملاحظة:

من خلال المثالين السابقين نلاحظ ما يلي:

1- إن دالة المتغير العقدي قد تكون قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي وهذه الملاحظة يؤكدها المثال الأول.

2- دالة المتغير العقدي قد تكون قابلة للاشتقاق عند بعض نقاط المستوي العقدي وغير قابلة عند بعضها الآخر. كما يؤكد صحة هذه الملاحظة المثال الثاني.

3- في المثالين الأول والثاني دالتي المتغير العقدي في هذين المثالين هي دوال مستمرة لكن إذا كانت دالة المتغير العقدي دالة مستمرة فليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقاق وهذا ما يؤكده المثال الثاني

4- في المثالين السابقين دوال القسم الحقيقي والقسم التخيلي لكلا الدالتين نلاحظ بأنها دوال قابلة الاشتقاق (اشتقاق جزئي) مع ذلك فليس من الضروري أن تكون دالة المتغير العقدي $f(z)$ دالة قابلة للاشتقاق وهذا ما يؤكده المثال الثاني.

5- إذا كانت الدالة $w = f(z)$ دالة قابلة للاشتقاق عندئذ تكون هذه الدالة دالة متصلة (مستمرة) وهذا ما نستنتجه من العلاقة التالية:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \cdot z - z_0$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

مما يعني أن الدالة مستمرة.

قواعد الاشتقاقات في الساحة العقدية:

إذا كانت $w = f(z)$, $w = g(z)$ دالتين قابلتين للاشتقاق عندئذٍ

1- $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$

2- $\frac{d}{dz}[f(z) \cdot g(z)] = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$

3- $\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)} \quad ; g(z) \neq 0$

4- إذا كانت $f(z) = c$ حيث c ثابت عددي فإن

$$\frac{d}{dz} f(z) = 0$$

5- إذا كانت $f(z) = z^n$ فإن

$$\frac{d}{dz} f(z) = n z^{n-1}$$

6- إذا كانت $w = f(z)$ دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة ما من المستوي العقدي

و $W = g(z)$ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $w = f(z)$

عندئذٍ تكون الدالة $F(z) = (g \circ f)(z)$ هي دالة قابلة للاشتقاق والمشتقة الأولى تعطى بالعلاقة

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{dg}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}$$

[عند الاشتقاق لا نعوض بالدالة كي لا تتغير الدالة]

مثال: $F(z) = (g \circ f) + g(f + z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

$w = f(z) = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow w = g(w) = w^2 \Rightarrow F(z) = (g \circ f) = g(f(z)) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{dg}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} = 2w \cdot \frac{z-1-(z+1)}{(z-1)^2} = 2w \frac{-2}{(z-1)^2} = -4 \frac{z+1}{(z-1)^3}$

شرطا كوشي ريمان: $f(z)=x^2-y^2+i\,2xy$

لتكن الدالة $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ قابلة للاشتقاق

عندئذ

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

لنجعل Δz يسعى نحو الصفر على المحور الحقيقي عندئذ

$$Re\,f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

كما أن

$$IM\,f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

أي أن

(1) $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

لنجعل الآن يسعى نحو الصفر على المحور التخيلي عندئذ

$$Re\,f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}$$

$$=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$IM\,f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}$$

$$=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

(2) $$f'(z)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

من (1) و (2) نستنتج أنه

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

وهاتان العلاقتان تعرفان بشرطي كوشي ريمان.

لهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية

إذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

دالة قابلة للاشتقاق عندئذٍ المشتقات الجزئية للدالتين بالنسبة للمتغيرين

المستقلين تكون موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك فإن هذه المشتقات

الجزئية تحقق شرطي كوشي ريمان الآتيان:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

والمشتقة الأولى لهذه الدالة تعطى بإحدى الصيغتين (1) أو (2)

ملاحظة: من المبرهنة السابقة نستنتج بأن شرطا كوشي ريمان هما

شرطان لازمان ولكن ليس من الضروري إذا تحقق شرطا

كوشي ريمان أن تكون الدالة $f(z) = u + iv$ دالة

قابلة للاشتقاق وهذا ما يوضحه المثال الآتي.

مثال:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & z \neq 0 \text{ عندما} \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية عند النقطة $z=0$ تحقق شرطي كوشي ريمان

لنبين أن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $z=0$

وحتى تكون الدالة قابلة للاشتقاق يجب أن يكون

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 - 0}{z-0}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(\bar{z})^2}{z^2}$$

لنجعل z تسعى نحو الصفر على المحور الحقيقي. عندئذ $\bar{z}=x \Leftarrow z=x$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

لنجعل z تسعى نحو الصفر على المحور التخيلي. عندئذ $\bar{z}=-iy \Leftarrow z=iy$

$\bar{z}^2=-y^2$ ، $z^2=-y^2$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{-y^2} = 1$$

نلاحظ بأن قيمة النهاية السابقة تساوي سابقتها لكن هذا لا يعني بأن النهاية موجودة

لنجعل z تسعى نحو الصفر على منصف الربع الأول والثالث ونعلم بأن $y=x$ هي معادلة منصف الربع الأول والثالث لذلك

$$z = x + ix \Rightarrow \bar{z} = x - ix \qquad z = x(1+i)$$

$$z^2 = i\,2x^2 \qquad \bar{z}^2 = x^2(-2i) \qquad z^2 = x^2(1+i)^2 = 2ix^2$$

$$\bar{z}^2 = -2ix^2$$

ونلاحظ بأن قيمة النهاية اختلفت باختلاف الطريق ولذلك فإن النهاية غير موجودة مما يعني بأن الدالة المعطاة في هذا المثال غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $z=0$ على الرغم من تحقق شرطي كوشي ريمان عند النقطة $z=0$ ⇐ شرطا كوشي ريمان لازمان وغير كافيان.

مبرهنة بدون برهان :

إذا لتكن لدينا الدالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالتين u , v بالنسبة للمتغيرين

المستقلين x , y موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي ريمان

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy} \wedge \frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dy}$$

عندئذٍ تكون الدالة f قابلة للاشتقاق والمشتقة الأولى تعطى بالصيغة

$$f'(z)=\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx}$$

أو

$$f'(z)=\frac{du}{dy}-i\frac{du}{dy}$$

مثال :١-

أثبت أن الدالة $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

هي دالة قابلة للاشتقاق وما هي المشتقة الأولى

$$u(x,y)=x^3-3xy^2 \qquad v(x,y)=3x^2y-y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{du}{dy}$$

لذلك استناداً من المبرهنة الأخيرة فإن الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق

والمشتقة الأولى $f'(z)=3(x^2-y^2)+i6xy$

$$=3[x^2-y^2+i2xy]$$

$$=3z^2$$

مثال - 2 -

بيّن فيما إذا كانت الدالة $f(z) = x - iy$ قابلة للاشتقاق أم لا ؟

الحل: $v(x,y) = -y$ $\quad$ $u(x,y) = x$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

نلاحظ بأن هذه المشتقات الجزئية لا تحقق شرط كوشي ريمان الأول لذلك الدالة غير قابلة للاشتقاق

مبرهنة بدون برهان:

لتكن لدينا الدالة $f(z) = u(r, \theta) + i\,v(r, \theta)$

تكون الدالة قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالتين u, v بالنسبة لـ r, θ موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي ريمان بالصورة القطبية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

وعندئذ المشتقة الأولى تعطى بالصيغة

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

أو

$$f'(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]$$

مثال:

أوجد مشتقة الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$

الحل:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} [\cos\theta - i\sin\theta]$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{r}\cos\theta \quad , \quad v(r,\theta) = -\frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\sin\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\sin\theta$$

نلاحظ بأن المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة في أي نقاط من

المستوي العقدي لا تحوي النقطة $z=0$

علاوة على ذلك فإن هذه المشتقات الجزئية تحقق

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{1}{r}\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\wedge \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

لذلك فإن الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق في أي نقاط لا تحوي نقطة الأصل

والمشتقة الأولى تعطى بالصيغة

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left[-\frac{1}{r^2}\cos\theta + i\frac{1}{r^2}\sin\theta\right]$$

$$f'(z) = \frac{1}{r^2} e^{-i\theta}[\cos\theta - i\sin\theta] = -\frac{1}{r^2} e^{-i\theta} e^{-i\theta}$$

$$= \frac{1}{r^2} e^{-2i\theta} = -\frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} = -\frac{1}{z^2}$$

$$f'(z) = \frac{1}{r} e^{-i\theta}\left[-\frac{1}{r}\cos\theta + i\frac{1}{r}\sin\theta\right]$$

أو

$$= -\frac{1}{r^2} e^{-i\theta} [\cos\theta - i\sin\theta] = -\frac{1}{z^2}$$

Note: إذا كانت أحد المشتقات الجزئية غير مستمر أو افتقد أحد شرطي كوشي ريمان فعندئذٍ تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق.

الدوال التحليلية:

لتكن $w = f(z)$ دالة متغير عقدي معرفة على النطاق D ولتكن z_0 إحدى نقاط هذا النطاق.

نقول عن الدالة $w = f(z)$ أنها دالة تحليلية عند النقطة z_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة $w = f(z)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 و قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط جوار ما لهذه النقطة

- نقول عن الدالة أنها تحليلية على النطاق D إذا وفقط إذا كانت تحليلية عند كل نقطة من نقاط هذا النطاق.
- نقول عن الدالة $w = f(z)$ أنها دالة شاملة إذا وفقط إذا كانت تحليلية عند جميع نقاط المستوى العقدي.
- نقول عن النقطة z_0 أنها نقطة شاذة للدالة $w = f(z)$ إذا وفقط إذا كانت هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 وكانت هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة واحدة على الأقل من نقاط جوار ما للنقطة z_0.

مثال: $f(z) = \frac{1}{z}$ ، $z = 0$ نقطة شاذة.

لأن الدالة $f(z)$ غير قابلة للاشتقاق عند $z = 0$ وقابلة للاشتقاق عند باقي نقاط المستوى العقدي.